数理解析研究所講究録 1325 巻 2003 年 15-20

容量を制限した場合の移動物体巡回問題

九州工業大学情報工学部制御システム工学科　下入佐 真一 (Shinichi Shimoirisa)
Department of Control Engineering and Science,
Kyushu Institute of Technology
九州産業大学情報科学部社会情報システム学科　朝廣 雄一 (Yuichi Asahiro)
Departmant of Social Information Systems,
Kyushu Sangyo University
九州工業大学情報工学部制御システム工学科　宮野 英次 (Eiji Miyano)
Department of Control Engineering and Science,
Kyushu Institute of Technology

1　はじめに

本稿では，平面上を移動する物体を巡回する経路選択問題に対して，次のような条件を付けた問題を考える．(i) 訪問される移動物体は一定の方向と一定の速さで等速直線移動している．(ii) 巡回者は一定の速さで，任意の方向に (直線的に) 移動し，時間 0 で移動方向を変えることができる．(iii) 巡回者は移動物体を訪問後，それを回収して，決められた回収点へと運ぶ．(iv) 巡回者 (回収者) が一度に回収できる移動物体の個数は K である．

移動物体の速さが 0 である問題は K-Collect TSP 問題 (または K-Delivery 問題，Capatiated Routing and Delivery 問題) として知られている代表的な配送問題の一つである [AG90, CM99]．$K\geq 2$ のときには NP 困難となり，文献 [AG90] では 2.5-近似アルゴリズムが提案されている．物体が移動している場合にも，回収者の速さがすべての移動物体の速さよりも大きい時には，すべての移動物体を回収することができ，移動経路の総和を最小化するような巡回路選択問題となる．この問題は Dynamic K-Collect TSP 問題として知られており，一般の場合には NP 困難となる．容量 K に制限が無い場合，すなわち，Dynamic ∞-Collect TSP に対しては，$\frac{5}{3\alpha}$-近似アルゴリズムが存在し，有限の容量 $K\geq 2$ に制限をした場合には，$(2.5e/\alpha)$- 近似アルゴリズムが存在することが知られている (ただし，移動物体の個数 n に対して，回収者の速さ v は $\frac{K}{2n}$ 以下であり，$\alpha=\frac{1-v}{1+v}$ と表される) [CM99]．また，$K=1$ に対しては最適な経路を求める多項式時間アルゴリズムが存在する．Dynamic ∞-Collect TSP に対しては，移動する物体の個数や移動物体の速さに条件を付けた問題など様々な問題が考えられ，幾つかの近似アルゴリズムが報告されている [HRZ03, HN99]．

本稿では，さらに，回収者の移動する速さが全ての移動物体の速さと同じか，もしくは遅いような特別な場合を考える．この場合，移動物体の初期位置，移動方向により回収出来ない物体が存在しうる．このため，回収者の移動経路の総和を最小化するのではなく，回収する移動物体の個数を最大化する最適化問題となる．この意味で，本稿で考える問題は移動物体に対する Prize-Collecting TSP [AABV99] の拡張と見なすこともできる．本稿で考える K-Routing and Delivery 問題を定義する：

K-Routing and Delivery：n 個の移動物体の集合 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ が与えられ，それぞれの物体 b_i は平面上の初期位置 p_i から $\vec{v_i}$ の速度で等速運動を行っている．回収者は原点 O を出発して $v\leq|\vec{v_i}|$

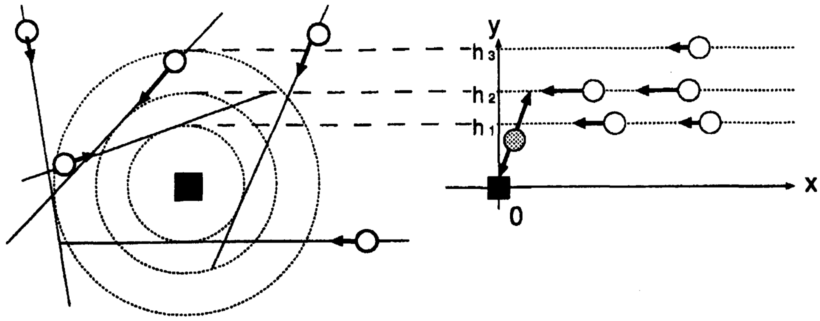

図 1: Parallel 例題

$(i=1,2,\cdots,n)$ の速さで平面上を任意の方向に等速移動して，正確に K 個の移動物体を回収して O に戻って来る (移動方向の回転に要する時間は無視する)．回収動作を繰り返して最大個数の物体を回収するような回収経路を求める．

今回の報告では $K=1$ の場合，すなわち，1-Routing and Delivery 問題に対して最大個数を回収するアルゴリズムを考える．以下で，$\alpha(n)$ は Ackermann 関数の逆関数を表すとする．(1) n 個の移動物体について，$O(n^2)$ 時間で回収個数の総和が最大となる移動物体の列を出力する簡単なアルゴリズムを示す．同じアイデアを用いることで，$K\geq 2$ の場合にも $O(n^{2K})$ 時間で最大個数の物体を回収するようなアルゴリズムを設計することができる．(2) 移動物体が，任意の速さで，任意の方向に等速移動する場合に $O(n2^{O(\alpha(n))}\log n)$ 時間で物体の回収個数を最大にするアルゴリズムが存在することを示す．(3) すべての物体の速さが等しく ($|\vec{v_1}|=|\vec{v_2}|=\cdots=|\vec{v_n}|$)，任意の方向に等速移動する場合に $O(n\alpha(n)\log n)$ 時間で物体の回収個数を最大にするアルゴリズムを示す．(4) 回収者の速さと移動物体の速さがすべて等しく ($v=|\vec{v_i}|$)，任意の方向に等速移動する場合に $O(n\log n)$ 時間で物体の回収個数を最大とするアルゴリズムを示す．

本稿で扱う問題と同様に，回収できない物体が存在する Prize-Collecting TSP の他の拡張として，回収者の移動できる範囲を直線上や円周上に限定した問題等も研究されている [SOY02, SAM02]．

2 1-Routing and Delivery 問題

以下では，巡回者を回収者，移動物体をボールと呼ぶことにする．今回考える問題ではボールの速さは回収者の速さ以上であるため，ある時刻を過ぎると回収できなくなってしまうようなボールが存在する．そのため，直感的には，なるべく早くボールを回収する必要がある．回収容量を $K=1$ とした場合には，あるボールを回収後，向きを 180 度変えて，ただちに原点 O へと回収者は戻らなければならない．そのため，ボールの移動方向を示す直線と原点 O の関係だけが重要となり，2 個以上のボール間の位置関係は重要ではない．そのため，3 次元空間上の任意の移動を回転させることにより，次のような Parallel 例題集合だけを考えれば良いことがわかる．図 1 のように原点 O，x 軸，y 軸を考える．

Parallel：n 個のボールの集合 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ の初期位置はすべて第 1 象限上にあり，b_i は x 軸に平行な直線 $y=h_j(j=1,2,\cdots,m,\ m\leq n)$ 上を速さ $\ell_i v(\ell_i\geq 1)$ で左方向 (x の負の方向) へ移動する．

3 単純な $O(n^2)$ 時間アルゴリズム

本節では，ある時刻にどのボールを回収するかを判定するとき，回収後，原点に最短時間で戻って来ることが可能なボールを回収するという判断を常に行うような貪欲法に基づくアルゴリズムにより $O(n^2)$

時間で最大個数のボールを回収できることを示す.

補題 1. 回収後，原点に最短時間で戻って来ることが可能なボールを常に回収するという貪欲法により，K-Routing and Delivery 問題の回収個数を最大にすることができる (証明省略).

定理 1. 1-Routing and Delivery 問題に対して，回収個数を最大にする $O(n^2)$ 時間アルゴリズムが存在する (証明省略).

一度に回収できる個数を (正確に)K とした場合には，${}_nC_K$ 個の回収の組合わせがあり，補題 1 より，その中で最短時間で戻って来れるものを見つける操作を高々$O(n^K)$ 回繰り返せばよいので，$O(n^{2K})$ 時間で最大個数を回収可能である.

4 アルゴリズムの高速化

第 3 節の $O(n^2)$ 時間アルゴリズムの問題点は，毎回残ったすべてのボールの回収時間を計算することにより，最短時間で回収できるボールを見つけていることにある．任意の時刻における最短時間回収可能なボールを最初に一度だけ計算をしておくことにより，アルゴリズムを高速化することができる．すなわち，横軸に時刻 T，縦軸に時刻 T における**ボールを回収して原点に戻って来るまでの時間** t をとり，各ボールの取って戻る時間が時刻によって変化して行く関数 ($T-t$ グラフ) を考えたとき，時刻 T における最短時間回収可能なボールと回収に要する時間は，それら n 個の関数のグラフの**下側エンベロープ**を考えることにより求めることができる．次のようなアルゴリズムを考える.

アルゴリズム 1-Grasp

ステップ 1：各ボール b_i について以下を実行する： 時刻 T において，回収後，原点へ戻るまでの時間 t_i を表す関数 $t_i = f_i(T)$ を求める.

ステップ 2：ステップ 1 で求めた n 個の関数 $f_1(T), f_2(T), \cdots, f_n(T)$ のグラフの下側エンベロープを求め，時刻 T における最短時間回収可能なボールを求める.

ステップ 3：$T=0$ とおき，回収するボールが無くなるまで以下を実行する.

(3-1) 時刻 T における最短時間回収可能なボール a_j と回収時間 t_j を求める.

(3-2) $T = T + t_j$ と更新後，(3-1) に戻る.

ステップ 4. (3-1) で求めたボールの列 $a_1, a_2, \cdots$ を出力する.

出力列 $\{a_j\}$ の中に，同じボール b_i が 2 度以上現れないことにより，アルゴリズムの正当性を証明することができる．計算時間に関しては，ステップ 1 の $f_i(T)$ は，各ボールの初期座標と速さにより求めることができるため，アルゴリズムの計算時間は，ステップ 2 の下側エンベロープを求める時間に従う．これは分割統治法に基づくアルゴリズムにより，効率良く求めることができるが，計算時間の上界については，任意の 2 つの関数の交点数によって異なる [AS99]．以降では，第 4.1 節では一般の場合の計算時間，第 4.2 節ではすべてのボールの速さが同じと制限を加えた場合の計算時間，第 4.3 節ではすべてのボールが回収者と同じであると制限を加えた場合の計算時間を考える.

4.1 一般の場合

すべてのボールが任意の速さで等速移動しているような一般の場合の計算時間を示す．以下で f_i はアルゴリズム 1-Grasp の中で求めた時刻 T に対するボール b_i の回収時間を表す関数である.

定理 2. 1-Routing and Delivery 問題に対して，回収個数を最大にする $O(n2^{O(\alpha(n))}\log n)$ 時間アルゴリズムが存在する.

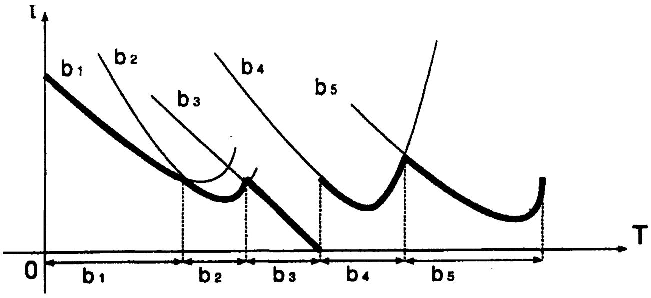

図 2: 下側エンベロープの利用

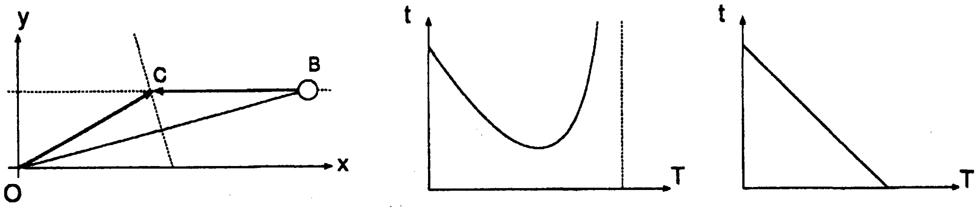

図 3: 速さの比が 1 : 1 の場合の取る地点 (左)，$Y_b \neq 0$ の場合 (中)，$Y_b = 0$ の場合 (右) の $T-t$ グラフ

証明．まず，任意の 2 つの関数 f_i，f_j は高々4 個の交点しか持たないことを示す．回収者の速さを v，ボールの速さを $\ell v(\ell \geq 1)$ としたとき，速さの比 ℓ を考えると $\ell = 1$ の場合と $\ell \neq 1$ の場合で関数の特徴が異なるため，まず，ボール b_i の速さを $\ell_i v$，初期座標を (X_{b_i}, Y_{b_i}) とした場合，どのような関数になるかを考える．このとき，時刻 T のボールの座標は $(X_{b_i} - \ell_i vT, Y_{b_i})$ となる．また，ボールを取る位置の座標 C_i を (x_{c_i}, y_{c_i}) とする．以下では簡単のため添字 i を省略する．まず $\ell = 1$ の場合を考える．ボールを取る地点 C は，図 3 のように原点 O と時刻 T のボールの位置 B を結ぶ線分 OB の垂直二等分線とボールの移動する軸との交点になる．これを元に T と t の関係式を考えると，$t = \frac{(X_b - vT)^2 + Y_b^2}{v(X_b - vT)}$ が求まる．また，$Y_b = 0$ の場合は $t = -T + \frac{X_b}{v}$ となり，直線の式になる (図 3 参照)．次に $\ell \neq 1$ の場合を考える．ボールを取る地点 C は，図 4 のように原点 O からの距離と時刻 T のボールの位置 B からの距離を $1 : \ell$ と分けるような点の軌跡によりできる円 (アポロニウスの円) と，ボールが移動する軸との交点になる．時刻 T によりこの円の中心の位置と半径が変化するため，ボール B を回収できる位置は，この円とボールが移動する軸が交わるような時刻には 2 点，接する時刻には 1 点存在する．

以上により，T と t の式を考えると，$t = 2\frac{\ell(X_b - \ell vT) \pm \sqrt{(X_b - \ell vT)^2 - (\ell^2 - 1)Y_b^2}}{v(\ell^2 - 1)}$ が求まる．これは，直線の式 $2\frac{\ell(X_b - \ell vT)}{v(\ell^2 - 1)}$ から $\pm 2\frac{\sqrt{(X_b - \ell vT)^2 - (\ell^2 - 1)Y_b^2}}{v(\ell^2 - 1)}$ したものである．今回は t を最小にするものを考えれば良いので，$t = 2\frac{\ell(X_b - \ell vT) - \sqrt{(X_b - \ell vT)^2 - (\ell^2 - 1)Y_b^2}}{v(\ell^2 - 1)}$ だけを考えればよい．また，$Y_b = 0$ の場合は $t = -\frac{2}{\ell \pm 1}T + \frac{2}{\ell \pm 1}\frac{X_b}{v}$ となり，2 本の直線の式になる．また，この 2 直線は x 切片で交わる．この場合も t を最小にするものを考えれば良いので，$t = -\frac{2}{\ell + 1}T + \frac{2}{\ell + 1}\frac{X_b}{v}$ だけを考えればよい (図 4 参照)．

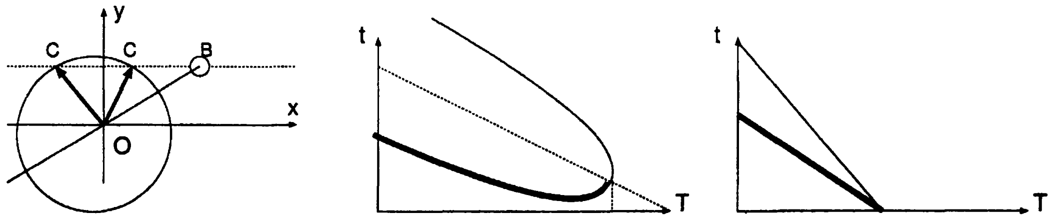

図 4: 速さの比が $\ell:1$ の場合の取る地点 (左)，$Y_b \neq 0$ の場合 (中)，$Y_b = 0$ の場合 (右) の $T-t$ グラフ

このときの交点が最も多くなる，$\ell_1 \neq \ell_2$ の場合を考えて，以下の 2 式を得る．

$$
\begin{aligned}
t &= 2\frac{\ell_1(X_{b_1}-\ell_1 vT)-\sqrt{(X_{b_1}-\ell_1 vT)^2-({\ell_1}^2-1){Y_{b_1}}^2}}{v({\ell_1}^2-1)}, \\
t &= 2\frac{\ell_2(X_{b_2}-\ell_2 vT)-\sqrt{(X_{b_2}-\ell_2 vT)^2-({\ell_2}^2-1){Y_{b_2}}^2}}{v({\ell_2}^2-1)}
\end{aligned}
$$

この 2 式の交点の方程式を求めればよいことになる．$M_1=(X_{b_1}-\ell_1 vT)^2-({\ell_1}^2-1){Y_{b_1}}^2$，$M_2=(X_{b_2}-\ell_2 vT)^2-({\ell_2}^2-1){Y_{b_2}}^2$，$N_1={\ell_1}^2-1$，$N_2={\ell_2}^2-1$ とおくことにより

$$((\ell_1 N_2 X_{b_1}-\ell_2 N_1 X_{b_2}-({\ell_1}^2 N_2-{\ell_2}^2 N_1)vT)^2-({N_2}^2 M_1+{N_1}^2 M_2))^2=-{N_1}^2{N_2}^2 M_1 M_2$$

となり，左辺，右辺ともに T の 4 次式になり，交点は高々4 点となる．

関数 f_i は，$T \geq 0$ の実数全体で定義されているのでは無く，f_i のグラフは右端点を持つ．このとき右端点から ∞ の傾きの半直線を延ばした関数 f'_i や同様に f'_j を考えた場合も，f'_i と f'_j の交点は 4 点となることを示すことができる．任意の 2 つの関数が高々4 個の交点を持つとき，下側エンベロープを構成する交点リストのサイズは $O(n2^{O(\alpha(n))})$ となることが知られている [AS99]．また，分割統治法により，$O(n2^{O(\alpha(n))}\log n)$ 時間で n 個のグラフの下側エンベロープを計算することが可能である．1-Grasp の (3-2) の時刻 T の更新は，$O(n2^{O(\alpha(n))})$ のサイズを持つ交点リストと比較を行うだけであり，高々$O(n2^{O(\alpha(n))})$ 時間で可能である．よって，1-Grasp は $O(n2^{O(\alpha(n))}\log n)$ 時間で動作することになる．□

4.2 すべてのボールの速さが同じ場合

定理 3．すべてのボールの速さが同じであるような入力に制限した場合，1-Routing and Delivery 問題に対して，回収個数を最大にする $O(n\alpha(n)\log n)$ 時間アルゴリズムが存在する．

証明．補題 2 の証明と同様の議論により，任意の 2 つ関数 f_i と f_j の交点について調べる．前述の式において $\ell_1=\ell_2=\ell$ とおく．

$$t=2\frac{\ell(X_{b_1}-\ell vT)-\sqrt{(X_{b_1}-\ell vT)^2-(\ell^2-1){Y_{b_1}}^2}}{v(\ell^2-1)},\ t=2\frac{\ell(X_{b_2}-\ell vT)-\sqrt{(X_{b_2}-\ell vT)^2-(\ell^2-1){Y_{b_2}}^2}}{v(\ell^2-1)}$$

となり，この 2 式の交点の方程式を求めるために，$M_1'=(X_{b_1}-\ell vT)^2-(\ell^2-1){Y_{b_1}}^2$，$M_2'=(X_{b_2}-\ell vT)^2-(\ell^2-1){Y_{b_2}}^2$ とおくことにより，次の式を得る．

$$\ell^4(X_{b_1}-X_{b_2})^4-2\ell^2(X_{b_1}-X_{b_2})^2(M_1'+M_2')+(M_1'-M_2')^2=0 \tag{1}$$

ここで，$2\ell^2(X_{b_1}-X_{b_2})^2(M_1'+M_2')$ は T の 2 次式の項となり，$(M_1'-M_2')^2$ 項は

$$(-2(X_{b_1}-X_{b_2})\ell vT+{X_{b_1}}^2-{X_{b_2}}^2-(\ell^2-1)({Y_{b_1}}^2-{Y_{b_2}}^2))^2$$

となるため，式 (1) は T の 2 次式となることがわかる．よって，交点は高々2 点であるといえる．

しかし，これは右端点を持つ関数の交点の数である．下側エンベロープを用いるとき，不連続なグラフの場合，端点から傾き ∞ の直線が出るものと考えるので，さらにもう 1 点の交点がある可能性があり，交点は高々3 点であるといえる．このとき，$O(n\alpha(n)\log n)$ 時間で下側エンベロープを求めることができ，1-Grasp の計算時間も $O(n\alpha(n)\log n)$ 時間となる．□

4.3 すべてのボールの速さが回収者と同じ場合

定理 4. すべてのボールの速さが回収者の速さと同じであるような入力に制限した場合，1-Routing and Delivery 問題に対して，回収個数を最大にする $O(n\log n)$ 時間アルゴリズムが存在する．

証明. 第 4.1 節で求めた式において $\ell=1$ とおき，整理すると，

$$(X_{b_1}-X_{b_2})v^2T^2-({X_{b_1}}^2-{X_{b_2}}^2+{Y_{b_1}}^2-{Y_{b_2}}^2)vT+{X_{b_1}}^2X_{b_2}+X_{b_2}{Y_{b_1}}^2-X_{b_1}{X_{b_2}}^2-X_{b_1}{Y_{b_2}}^2=0$$

となる．つまり，T に関する 2 次式となり，交点は高々2 点であることが言える．また，すべてのボールの速さが回収者と同じ，すなわち $\ell=1$ の場合には，右端点を考慮する必要はないことが証明できる．任意の 2 つの関数は高々2 個の点で交わるときの交点のリストのサイズは文献 [AS99] により $2n-1$ となることが示されており，1-Grasp の計算時間は $O(n\log n)$ となる．□

5 おわりに

$K\geq 2$ に対しても，関数の交点の解析が複雑になるが，今回と同様の議論により高速なアルゴリズムを設計できると考えられる．さらに，一度に回収できる個数を正確に K 個としているところを，より一般的に K 個以下とした問題に対するアルゴリズムおよび複雑度を求めて行きたい．

参考文献

[AS99] P.K.Agarwal and M.Sharir. Davenport-Schinzel Sequences and their geometric applications. In *Handbook of Computational Geometry* (J.Sack and J.Urutia, eds), Elsevier Science Ltd (1999)

[AG90] K.Altinkemer and B.Gavish. Heuristics for delivery problems with constant error guarantees. *Transportation Science*, 24(4), 294–297 (1990)

[AABV99] B.Awerbuch, Y.Azar, A.Blum, and S.Vempala. New Approximation Guarantees for Minimum-Weight k-Trees and Prize-Collecting Salesmen, *SIAM J Computing* 28(1), (1999)

[CM99] P.Chalasani and R.Motwani. Approximating capacitated routing and delivery problems. *SIAM J Computing* 28, 2133–2149 (1999)

[HRZ03] C.S.Helvig, G.Robins, and A.Zelikovsky. Moving Target TSP and Related Problems, *J of Algorithms*, to appear (2003)

[HN99] M. Hammar and B. J. Nilsson. Approximation results for kinetic variants of TSP, In *Proc of 26th International Colloquium, Automata, Languages and Programming*, LNCS 1644, 392–401 (1999)

[SOY02] 佐久間, 小野, 山下, 朝廣, 牧野, 堀山. 直線軌道を移動するロボットによるボール回収問題. 夏の LA シンポジウム, 講演番号 14 (2002)

[SAM02] 下入佐, 朝廣, 宮野. 移動物体に対する最大巡回位置発見アルゴリズム. 電気関係学会九州支部連合大会, p.344 (2002)